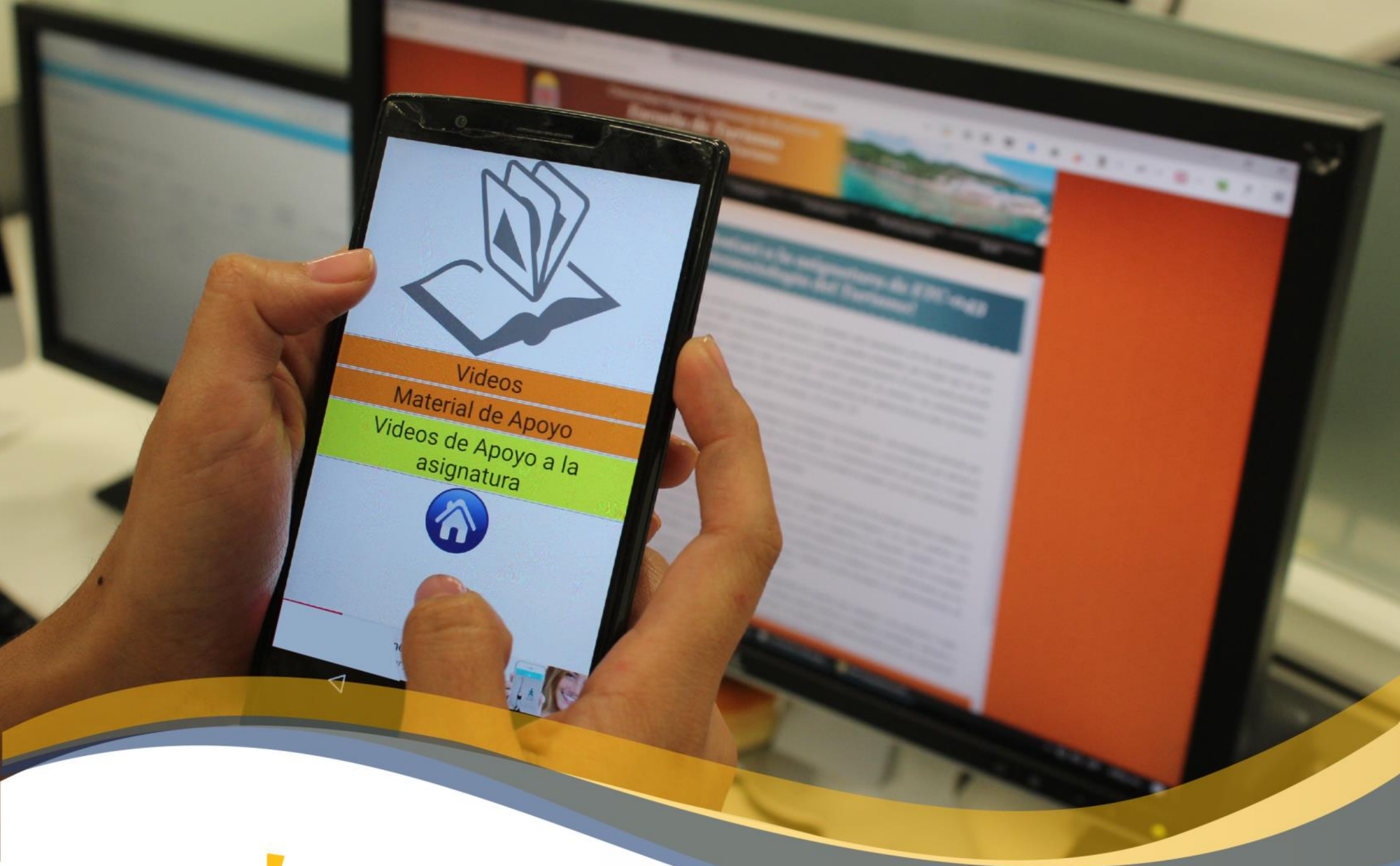


Atrévete a innovar

Proyectos de Innovación Educativa 2017

Informes de Resultados

DIE DIRECCIÓN DE INNOVACIÓN EDUCATIVA

LUCEM ASPICIO UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS 1847

UNAH UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS

INFORME DE RESULTADOS

Nombre del proyecto: Desarrollando competencias variacionales en alumnos de álgebra (MM-110) y cálculo diferencial (MM-201) mediante el software geogebra y otras herramientas interactivas.
Modalidad de participación: Grupal
Centro Regional: UNAH-TEC Danlí.
Línea o líneas de innovación educativa en las que se enmarca el proyecto: Tecnologías para la Educación.
Nombre del autor 1: Marvin Roberto Mendoza Valencia
Nombre del autor 2: Oswaldo Enrique Cubas Salinas
Facultad/Escuela y Departamento Académico: Ciencias
Asignatura (s) a la (s) que está dirigido el proyecto: Matemática I **(**MM-110) y Cálculo I(MM-201)
Periodo de tiempo en que se implementó (aplicó) el proyecto: I, II, III PAC -2018

Problema o necesidad educativa a resolver

Este proyecto de Innovación al desarrollo, construcción y comprensión de objetos matemáticos fundamentales en matemáticos (funciones)–desde una perspectiva variacional y con el soporte de un software dinámico, como lo es Geogebra. En la realización del proyecto se consideró la interacción didáctica y del conocimiento disciplinar como una nueva estrategia sostenida y significativa de los objetos matemáticos que involucran variación y cambio (función en sus diferentes contextos). Una pretensión de este proyecto realizado es que se pueda convertir en una buena práctica de la enseñanza de las funciones en la zona oriental y que pueda ser una experiencia digna de crédito y réplica en otros contextos. En particular pretendemos dar respuesta a la siguiente pregunta orientadora de este proyecto: **¿Cómo se podría desarrollar pensamiento variacional que coadyuve a la construcción, comprensión e interpretación de las funciones, combinando lo didáctico, lo cognitivo, y lo procedimental, mediante el uso de Geogebra?**

Justificación

Este proyecto de innovación se orientó a sostener una interacción acertada y una construcción significativa de los diferentes objetos apoyados en la tecnología desde una perspectiva variacional. Además, vislumbramos que una adecuada interacción didáctica y del conocimiento disciplinar podrían convertirse en una nueva estrategia sostenida y significativa de los objetos matemáticos que involucran variación y cambio (función en sus diferentes contextos).

Este proyecto de innovación utilizó el software interactivo geogebra por su facilidad de uso libre y a sus bondades de uso en las aulas de matemática de importantes universidades.
Una proyección de este proyecto innovación planteó la posibilidad de trascender a beneficiar al sistema educativo terciario, puesto que, si logramos resultados adecuados en los estudiantes, los próximos maestros de los cursos de matemáticas de Matemática I serán beneficiados.

Objetivos del proyecto

Objetivo General:

Utilizar la herramienta geogebra para construir funciones desde una perspectiva variacional integrando lo didáctico, cognitivo y dinámico.

Objetivos Específicos:

1. Construir tres tipos de funciones (lineales, cuadráticas, cúbicas, racionales) mediante geogebra y otros softwares.
2. Interpretar el significado de las gráficas de las cuatro funciones construidas de las ocho secuencias de aprendizaje construidas.
3. Analizar desde una perspectiva dinámica las diferencias de las cuatro de diferentes funciones construidas con geogebra.
4. Interpretar el significado de las gráficas de cuatro funciones construidas de la secuencias.
5. Evaluar el impacto del proyecto mediante diferentes discusiones dialogadas de las cuatro funciones construidas.

Fundamento teórico del proyecto

Muchos autores coinciden en que la competencia matemática se refiere a la comprensión y utilización de la matemática. Según Albano (2012), "… no algo que se enseñe sino un objetivo a largo plazo del proceso de enseñanza y aprendizaje. Se trata de algo complejo y dinámico, que requiere unos conocimientos declarativos-proposicionales y procedimentales del área de matemáticas, es decir, conocimientos (saber) y destrezas (saber hacer), pero que al mismo tiempo trasciende los factores cognitivos."

El aprendizaje de la matemática es, sin duda, una de las instrucciones fundamentales de la educación y a la vez, una de las que supone mayor dificultad en el estudiante. Resultados de pruebas internacionales (TIMMS, PISA, SERCE, TERCE) revelan que los aprendizajes que muestran nuestros estudiantes latinoamericanos en matemáticas son insuficientes para tener éxito en su formación de carreras ingenieriles o aquellas que necesiten de matemáticas en sus cursos posteriores. Los informes de las pruebas anteriormente señaladas argumentan que distintos factores condicionan los resultados de la evaluación en matemáticas. Una de las sugerencias de atención a estos resultados de las pruebas, es la transmisión y la enseñanza de la matemática, además del uso de metodología.

Otro aspecto que se menciona en los informes, es una nueva conceptualización teórica que va orientada al desarrollo de competencias y habilidades de pensamiento matemático, tal como lo señala la UNESCO, PROYECTO TUNNING, entre otros. Es necesario buscar soluciones integrales que incluyan todos los elementos que nos han llevado a estos niveles de incompetencia matemática y plantear soluciones que ataquen todas las causas y los efectos que cada una de ellas genera en los otros elementos (Bagur, 2011).

En el contexto Nacional, los resultados en matemática son igualmente alarmantes, en el último informe de rendimiento de matemática del 2016 del Ministerio de Educación menciona que el nivel global de aprovechamiento de matemática no llega a 60% aún. De igual manera los resultados de la prueba de aptitud académica de la UNAH (PAA) los resultados en matemática son relativamente bajos. Los informes tanto internacionales como nacionales reflejan una necesidad que debe atenderse de algunas de las perspectivas que sugieren los expertos. Tradicionalmente la matemática se ha desarrollado desde una perspectiva tradicional basada en algoritmos, pero con el paso de los años y las investigaciones han mostrado la necesidad de investigar en cómo aportar a este problema que involucra diferentes causas, variables, condiciones, etc.

La manera de representarse distintos conceptos matemáticos, tales como el de función requiere el desarrollo de competencias y habilidades propias, ya que este concepto ha generado una mayor dificultad en los estudiantes. La enseñanza de la matemática tradicionalmente ha estado basada en las clases de tipo formales basadas en definiciones, teoremas, axiomas, corolarios, problemas propuestos y problemas para resolver. Esta visión paradigmática de la enseñanza ha provocado aversión a la matemática y su enseñanza (Molfino, 2010).

Las nuevas tecnologías brindan potentes herramientas que facilitan la visualización de objetos matemáticos sin importar la complejidad matemática que estas representen. Estas herramientas abrieron una nueva ventana para entender el universo de las matemáticas y actualmente son numerosos los softwares que hacen uso del cálculo simbólico y numérico para manipular una gran cantidad de objetos matemáticos (Derive, Mathematica, Geogebra, Matlab, entre otros). Así mismo, el auge del internet trajo consigo la oportunidad de utilizar paquetes desarrollados con carácter matemático sin necesidad de tener instalados dichos softwares en una computadora, basta con ingresar al sitio web para obtener las soluciones o verificaciones en tiempo real.

El uso de paquetes informáticos como herramienta de apoyo para la enseñanza de la matemática a nivel nacional ha presentado un crecimiento durante los últimos años, sin embargo, insuficiente. Diferentes factores condicionan su uso, puesto que utilizar estas herramientas en los salones de clases implica invertir una buena parte del tiempo en aprender a manejar dichos softwares debido a su complejo uso de los comandos o bien, debido a que su interfaz se muestra en otro idioma. En muchos de los casos, la falta de información por parte de los docentes sobre qué software puede utilizar para ilustrar de una mejor manera sus ideas es la que evita que dichas herramientas tengan un lugar en el salón de clase y, por tanto, se evita que el estudiante aprenda mediante el uso la tecnología. Investigadores de la enseñanza de la matemática universitaria sostienen que el desafío del uso de la tecnología aún es imperante y necesaria dados los cambios vertiginosos en las educaciones no formales y en el acceso que tienen nuestros estudiantes.

A juicio de los investigadores en Educación Matemática la manera que se aborda la enseñanza de la matemática en las distintas asignaturas se desarrolla primordialmente de una manera tradicional (Cantoral y Montiel, 2001; Hitt, 2003) y con algunas pequeñas variantes metodológicas.

El Siglo XXI se ha convertido de alguna manera como un ciclo de transición de las maneras de concebir el mundo en su accionar en distintos ámbitos, y los desafíos que presenta la Educación a nuevos paradigmas de enseñanza se ha constituido en una de las preocupaciones y problemas por atender en este nuevo escenario global que presenta el mundo de hoy. Es por ello, que se hace necesario conocer los nuevos planteamientos en materia de Educación, y en particular en el nivel terciario.

En la Declaración Mundial sobre Educación Superior en el siglo XXI (“UNESCO”, 1998), la Educación Superior se enfrenta en todas partes a desafíos y dificultades relativos a la financiación, la igualdad de condiciones de acceso a los estudios y en el transcurso de los mismos, una mejor capacitación del personal, la formación basada en las competencias, la mejora y conservación de la calidad de la enseñanza, la investigación y los servicios, la pertinencia de los planes de estudios, las posibilidades de empleo de los diplomados, el establecimiento de acuerdos de cooperación eficaces y la igualdad de acceso a los beneficios que reporta la cooperación internacional. La Educación Superior debe hacer frente a la vez a los retos que suponen las nuevas oportunidades que abren las tecnologías, que mejoran la manera de producir, organizar, difundir y controlar el saber y de acceder al mismo. Deberá garantizarse un acceso equitativo a estas tecnologías en todos los niveles de los sistemas de enseñanza.

En el Artículo 12, la UNESCO establece que los rápidos progresos de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación seguirán modificando la forma de elaboración, adquisición y transmisión de los conocimientos. También es importante señalar que las nuevas tecnologías brindan posibilidades de renovar el contenido de los cursos y los métodos pedagógicos, y de ampliar el acceso a la educación superior.

La aparición de herramientas tan poderosas como la calculadora y el ordenador actuales está comenzando a influir fuertemente en los intentos por orientar nuestra educación matemática primaria y secundaria adecuadamente, de forma que se aprovechen al máximo de tales instrumentos. Es claro que, por diversas circunstancias tales como coste, inercia, novedad, impreparación de profesores, hostilidad de algunos, aún no se ha logrado encontrar moldes plenamente satisfactorios. Este es uno de los retos importantes del momento presente. Ya desde ahora se puede presentir que nuestra forma de enseñanza y sus mismos contenidos tienen que experimentar drásticas reformas. En este sentido, Cuicas, M., Debel, E.; Casadei, L., y Álvarez, Z. (2007) citando a Fernández, Izquierdo y Lima (2000), sostiene que el uso de tecnologías en la enseñanza de la matemática permite en el alumnado el desarrollo de habilidades del pensamiento como: explorar, inferir, hacer conjeturas, justificar argumentar y de esta forma construir su propio conocimiento.

Lo anterior implica que la tecnología con la debida orientación se podría constituir en una herramienta potente en la construcción de nuevos saberes y el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático. Otros investigadores (Villareal, 2012) considera que es importante que se garantice a los estudiantes el abordaje de la tecnología no de modo domesticado, como auxiliar para mostrar un gráfico o una construcción geométrica dinámica; los estudiantes deberían tener la oportunidad de aprender matemática con la computadora. Entretanto, los estudiantes tienen escasas oportunidades de aprender matemática con computadoras porque no es la manera usual de aprender matemática y porque no se asume como posición epistemológica básica que los medios son constitutivos del conocimiento.

El pensamiento variacional es conceptualizado desde distintas perspectivas de acuerdo a ciertos elementos, su génesis intrapersonal o extra personal y los indicadores de su desarrollo. Una primera mirada afirma que uno de los propósitos del pensamiento variacional es articular la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (Cantoral y Farfán, 1998) y a situaciones que involucran variación en contextos; ya sean estos: realistas o fantasiosos, intra o extra matemáticos.

Desde esta mirada, un saber no se estudia únicamente desde lo cognitivo, ya que las creaciones humanas, las matemáticas en este caso, se han desarrollado en contextos históricos, culturales y sociales situados, y es a través de las prácticas sociales que los seres humanos le dan sentido a lo que hacen, comparten códigos, utilizan diferentes estructuras y lenguajes (Cantoral y Farfán, 2003). De otras investigaciones en esta perspectiva del Pensamiento Variacional (Maury et A, 2012) se desprende que este pensamiento involucra elaboración de estrategias, formas de razonamiento, elementos y estructuras lingüísticas, que permiten comunicar el estudio y análisis del cambio y la variación, argumentan además que los objetivos del pensamiento variacional se orientan a desarrollar estructuras de pensamiento que permitan identificar, analizar e interpretar, de manera natural, situaciones relacionadas con el cambio y, a su vez, modelarlos y transformarlos en otros más simples.

Una segunda referencia teórica, que es de especial interés en este estudio, considera que el pensamiento variacional combina lo cognitivo y lo didáctico para propiciar su génesis, potenciación y desarrollo. En este orden de ideas, se plantea que el pensamiento matemático variacional debe considerarse como la base sobre la cual se estructure el currículo matemático, ya que éste es un pilar y eje de los otros pensamientos matemáticos (numérico, espacial o geométrico, estocástico, métrico) figurando como un eje articulador de éstos; los cuales en conexión e interrelación deberían promover el desarrollo de habilidades matemáticas en diferentes contextos. Ello implica que el pensamiento variacional (MEN, 2006) se estructure en base a ciertos procesos generales: formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar, formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos y, a la vez, sobre ciertos estándares de medición que se constituyen en el medio de desarrollo de habilidades, y de cada uno de los pensamientos matemáticos. En esta mirada del pensamiento matemático, cada uno está ligado a los demás pensamientos, y cada uno se potencia en la medida que se desarrollan los otros, mediante los procesos generales.

El pensamiento variacional es concebido como una forma dinámica de pensar que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades, de la misma o distintas magnitudes, en los subprocesos recortados de la realidad (Vasco, 2003, 2006). En esta definición para pensamiento variacional, Vasco distingue dos momentos: el primero en el que se determina lo que varía, lo que permanece constante, se identifican patrones de regularidad de los procesos y, un segundo momento que requiere acciones cognitivas para la producción de sistemas mentales para reproducir covariaciones entre magnitudes. Para este autor, la cognición de cada sujeto ayuda a crear sistemas mentales, que a su vez ejecuta, revisa, refina y, de ser necesario descarta. En esta última acción, se inicia un nuevo proceso de génesis de modelos. Desde esta mirada, los modelos mentales se afinan, y se convierten en representaciones mentales (Duval, 1999) los cuales son exteriorizados mediante representaciones semióticas que pueden ser palabras, dibujos, letras, números.

Pensar variacionalmente desde este enfoque es desarrollar capacidades que permitan utilizar diferentes representaciones, interpretarlas y analizar dinámicamente lo que sucede en la otra representación si se modifica una condición particular. Se trata de un proceso mental activo en el que se generan secuencias de imágenes mentales (no ostensivas) que se van refinando hasta que la comprensión de la situación, vía procesos de visualización, conduce a un modelo mental de la situación planteada, la cual es objetivada por representaciones que dan cuenta de la covariación de las variables involucradas, manifestada en algún tipo de soporte material (registro ostensivo).

A este mismo respecto, Carlson et al., (2002), emplean otra terminología y se refieren a razonamiento covariacional, definiendo éste como una actividad cognitiva que considera la coordinación del cambio conjunto entre dos variables, cuantificando lo que sucede en una variable, si la otra cambia. Los autores realizaron una investigación con estudiantes universitarios, y proponen cinco acciones mentales asociadas a ciertos niveles para determinar la covariación entre dos cantidades, atendiendo al grado de desarrollo entre un nivel básico y uno superior. En este sentido, proponen: a) coordinación de los valores de las variables, cuando hay cambio en una y en otra, b) coordinación de la dirección del cambio, c) coordinación de la cuantificación del cambio en una y en la otra variable, d) coordinación de la razón de cambio, y e) coordinación de la razón instantánea de cambio en valores en el dominio de la función. Por su parte, Grozdev, y Todorka, (2010) sostienen que la función concreta del pensamiento variacional consiste en descubrir las propiedades ocultas, determinar las conexiones y correlaciones de una situación mediante la transformación de la realidad, donde sólo a través del pensamiento conceptual y visual-figurativo se haría difícil o imposible. Diferentes investigaciones (Zorn et al., 2004;) sostienen la importancia de utilizar diferentes experiencias, metodologías, contextos y representaciones para desarrollar diferentes nociones y objetos matemáticos.

Es relevante señalar que muchas acciones de los sujetos en su cotidianeidad son pre matemáticas, entendiéndose éstas como una manifestación que desde el lenguaje verbal y puramente cotidiano (no matemático en la concepción del alumno), encierra potencialmente un concepto matemático expresable en algún registro de representación, ya sea geométrico, algebraico, numérico, tabular u otro. Ejemplos de expresiones pre matemáticas aparecen en el diálogo de los estudiantes cuando hablan, por ejemplo, de distancias sin interpretar la distancia como un concepto matemático, no se sitúan en un contexto métrico, sino que hablan de la distancia entre dos objetos de manera aislada.

Otra componente teórica considerada en este trabajo es la visualización matemática puesto que es el puente requerido para conectar lo ostensivo o perceptible con lo no ostensivo (imágenes mentales). De acuerdo con Torregrosa y Quesada, (Torregrosa y Quesada, 2007), la definición y caracterización de los procesos de visualización y razonamiento, es un avance en la línea de conocimiento del fenómeno cognitivo, ya que separa la acción cognitiva (proceso), de las distintas representaciones e imágenes mentales.

Según Arcavi (1999), la visualización no está solamente relacionada con la ilustración, sino también es reconocida como una componente clave del razonamiento (profundamente unida a lo conceptual y no meramente a lo perceptivo), en la resolución de problemas e incluso en los procesos de demostración. Por esta razón, concordamos con Torregrosa y Quesada (2007) que afirman: “vemos a los procesos de visualización y de razonamiento, junto con su coordinación, como elementos esenciales de un modelo conceptual que nos permite conocer la actividad de los alumnos; en la línea abierta por Bishop (1983), para conocer en la medida de lo posible, el interfaz de la actividad matemática cuando se enfrentan a la resolución de problemas en geometría.” En nuestro caso, cuando se enfrentan al análisis de situaciones dinámicas en las que intervienen correlaciones de variables.

Metodología

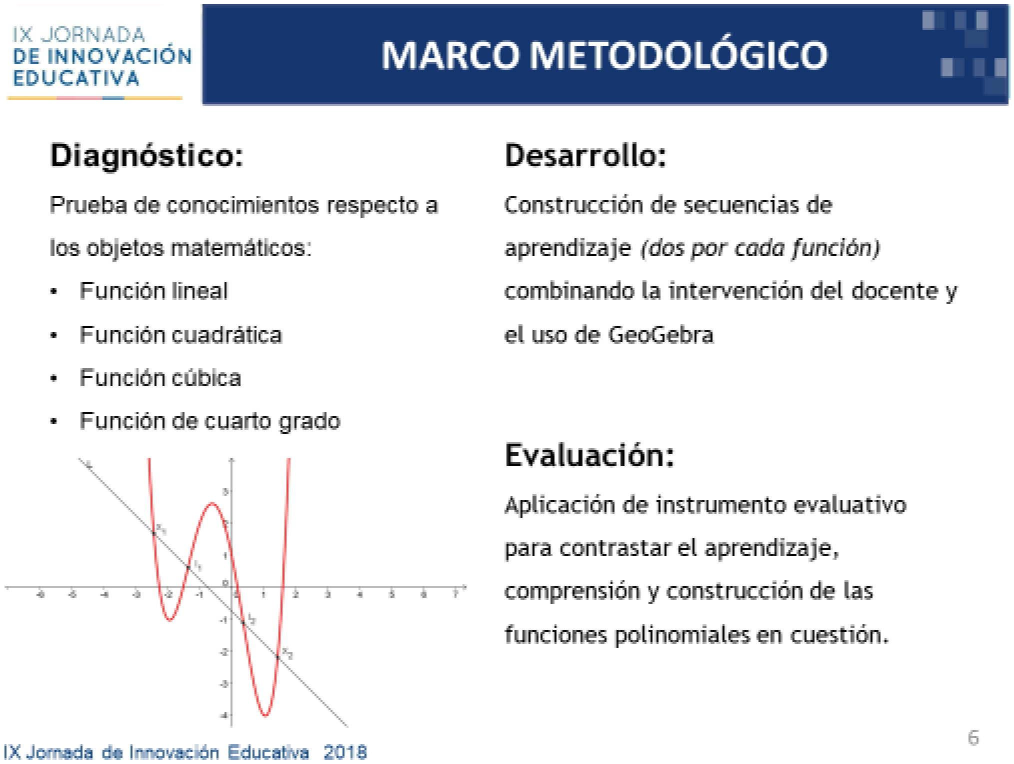
La metodología aplicada se fundamentó en principios del constructivismo, considerando al estudiante como centro del proceso de aprendizaje. Para ello se propuso ciertos instrumentos en **una fase diagnóstica**, **desarrollo y de evaluación del proceso**. En la primera fase se realizó una inducción previa para dar a conocer la herramienta.

En esta I etapa se realizaron análisis relativos al contexto escolar, horarios, sílabos, contenidos, profesores para conocer la realidad de la enseñanza de la matemática en nuestro centro regional y conocer los estilos de enseñanza de los docentes.

También se indagó a especialistas en matemática con especialidad en informática. A esta tercera actividad se le denomina la interacción de lo disciplinar (matemático) desde una perspectiva dinámica). Luego se construyó **una prueba de conocimientos y se aplicó un instrumento** de los objetos matemáticos en cuestión (función lineal, cuadrática, cúbica).

En la segunda fase del proyecto **se construyeron ocho secuencias de aprendizaje** (dos por cada función) combinando la intervención del docente y el uso de Geogebra. En ese sentido, en la etapa de desarrollo se realizó el análisis y revisión del estado de las diferentes fuentes relativas al concepto de función, clasificación, representaciones y se realizó una sistematización de estos trabajos y se clasificación de acuerdo a la naturaleza de los mismos (corte cognitivo, epistemológico, visuales, entre otros). La labor realizada aportó diferentes elementos de juicio en lo epistemológico del objeto matemático de función. Se procuró que los estudiantes tuviesen el material necesario, el equipo y la logística requerida para el desarrollo de las actividades. Las actividades se focalizaron en la **construcción del objeto matemático de función polinomial** (lineal, cuadrática, cúbica) desde una perspectiva variacional y con el soporte del software geogebra.

En la tercera etapa del proyecto se construyó un instrumento evaluativo para contrastar el aprendizaje, comprensión, construcción de las funciones polinomiales en cuestión. En esta etapa se aplicaron encuestas y entrevistas a estudiantes para conocer su nivel de percepción del proyecto aplicado.



Productos tangibles del proyecto

- Prueba diagnóstica de conocimientos (ver anexo uno).
- 8 Secuencias didácticas (ver anexo dos).
- Prueba evaluativa final (ver anexo tres).

Resultados o impacto educativo

El análisis de los instrumentos aplicados durante las distintas sesiones demostró que los estudiantes utilizan con destreza los softwares y se familiarizan con facilidad. En general se observaron indicios de potenciación de pensamiento variacional y de otras habilidades matemáticas como la visualización. Las interacciones entre los grupos y la discusión de los pares ayudaron a la construcción de objetos matemáticos funcionales pretendidos durante el proyecto. El uso de la tecnología adecuada muestra su alto potencial para el desarrollo de conceptos matemáticos complejos. Lo anteriormente señalado refleja que el proyecto a nivel cualitativo logró potenciar actitudes deseables en el saber ser de estudiantes universitarios.

A nivel cuantitativo el proyecto redundó en resultados positivos, ya que en las evaluaciones de la temática en la mayoría de los participantes mostró al menos un 85% en la comprensión de las funciones polinomiales y sus diferentes elementos. Además, se potenció el pensamiento variacional.

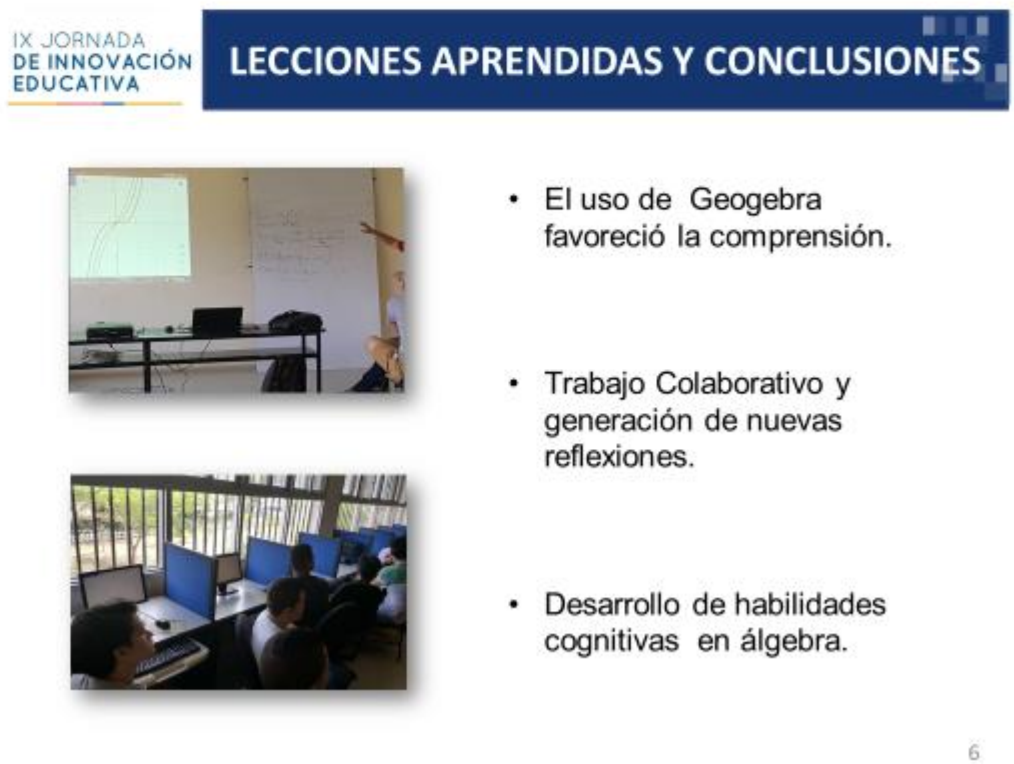
Sostenibilidad del proyecto

El Proyecto es viable y sostenible, ya que contamos con los insumos (pc, software, proyector, impresora) y los productos tangibles que involucró el proyecto (instrumentos: diagnóstico, desarrollo y final). Además, con el personal humano para el desarrollo del mismo. Uno de los desafíos es mejorar los instrumentos e incorporar nuevos elementos (interactividad, dinamismo, entre otros) y trascender a otros cursos de matemática.

Conclusiones o aprendizajes del proyecto

El uso de software Geogebra apoyó en gran medida a la comprensión de los objetos matemáticos pretendidos, ayudó a motivar a los estudiantes en conceptos tradicionalmente complejos y al desarrollo de habilidades de pensamiento matemático. Geogebra se puede constituir con el uso dirigido y adecuado en una herramienta eficaz y como alternativa complementaria para el desarrollo de saberes matemáticos. La visualización y otras habilidades de pensamiento matemático se ven fortalecidas por el uso de Geogebra.

La importancia de cultivar el Pensamiento Variacional es construir distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, Vasco (2006). En este aspecto la Tecnología interviene como una forma de producir las relaciones variacionales que se dan entre algunos objetos matemáticos, e involucrar procesos de experimentación con software, a partir de los cuales, tanto estudiantes como investigadores, visualicen, generalicen y abstraigan relaciones y propiedades de los objetos matemáticos estudiados



Referencias bibliográficas

- Arcavi, A. (1999). ¿Qué construimos? Números, 38, 39-56.
- Artigue, M. (1995). "Ingeniería Didáctica en Educación Matemática". pp. 33-59. P. Gómez (ed.), Una Empresa Docente-Grupo, Editorial Iberoamérica, Bogotá, Colombia.
- Artigue, M (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 1(1), 40-55.
- Blanton, M. (2010). Future Curricular Trends in School Algebra and Geometry: Proceedings of a Conference by Usiskin, Andersen & Zotto, pp. 45-61. Information Age Pub., Chicago, USA.
- Cantoral, R., & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Epsilon, 42(14).

- Carlson, M., Sally Jacobs, Coe, E., Sean Larsen, y Hsu, E. (2002).Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. . http://doi.org/10.2307/4149958, Journal for Research in Mathematics Education, (en línea), 33(5), 352–378.
- Cornu, B. (1983). Apprentissage de la notion de límite: conceptions et obstacles (Th'ese de doctorat). Université de Grenoble I.
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales, 1a edición traducción al español a cargo de M. Vega, 1-314, Universidad del Valle Grupo de Educación Matemática, Cali, Colombia. Bishop, A. J. (1983). Space and geometry, Acquisition of mathematics concepts and processes by Lesh & Landau, pp 125–203. Academic Press Pub., New York, USA.
- Grozdev, S., T. Terzieva. (2010). Development of variational thinking skills in Programming teaching, Proceedings of the Anniversary International Conference, Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications, December 10-12, Plovdiv-Bulgaria.
- Isoda, M. (1996). The development of the language of function: An application of Van Hiele's levels. 20th. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, 105-112, Valencia-España, july 8-12.
- Maury, E., Palmezano, G., Cárcamo, S. (2012). Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria, Escenarios, 10(1), 7-16. Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas, 1a edición, 6-186, editorial M. Schmidt, Bogotá, Colombia.
- Molfino, V. (2010). Procesos de institucionalización del concepto de límite: análisis socioepistemológico.Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.
- Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. Recherchesen Didactique des Mathématiques, 6 (1), 5-68.
- Tall, D. (1980).Mathematical Intuition, with Special Reference to Limiting Processes. Proceedings of PME 4, pp. 170 – 176.
- Torregrosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10(2), 275-300. Vasco, C. E. (2003). Objetivos específicos, indicadores de logros y competencias: ¿y ahora estándares?.
- Vasco, C. E. (2006). Didáctica de las matemáticas: artículos selectos. U. Pedagógica Nacional. Warren, E., Miller, J., y Cooper, T. J. (2011). An exploration of young students' ability to generalise function tasks. 34th. Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia, pp. 752-759, Adelaide-Australia, july 3-7.
- Zorn, P., Judson, T., Kota, O., Okabe, T., Kiuchi, T., y Becker, J.(2004). TSG 3: The Teaching and Learning of Calculus by H. Fujita et al., pp. 300-302. Kluwer Academic Publisher., Dordrecht, Netherlands.

Anexos

Anexo n°1

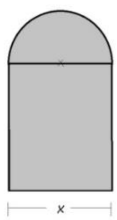
Prueba Diagnóstica

Nombre: ______________________________________ N° de cuenta: ______________

Catedrático: ___________________________________ Fecha: ____________________

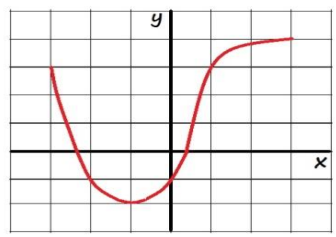
Instrucciones: trabaje en forma clara y ordenada cada ejercicio. Adjunte todos los procedimientos respectivos.

1. Un rectángulo tiene un perímetro de 20m. Exprese el área del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados.
2. Exprese el área de un triángulo equilátero como función de la longitud de uno de los lados.
3. Exprese el área de un cubo como función de su volumen.
4. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 30ft, exprese el área A de ella como función del ancho x de la misma.



5. Debe construirse una caja con su parte superior abierta a partir de un trozo rectangular de cartón que tiene las dimensiones de 12in y 20in, recortando cuadrados iguales de lado x en cada una de las esquinas y, a continuación, doblando los lados como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V de la caja como función de x.

6. El propietario de una casa corta el césped cada miércoles por la tarde. Trace una gráfica aproximada de la altura del césped como función del tiempo durante un periodo de cuatro semanas.
7. En la tabla, se muestra la población P (en miles) de San José, California desde 1984 a 1994. (se dan las estimaciones correspondientes a la mitad del año). Elabore una gráfica que muestre esta situación.



	1984	1986	1988	1990	1992	1994
	695	716	733	783	800	812

8. Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, encuentre $f(0), f(2), f(\sqrt{2}), f(1+\sqrt{2}), f(-x), f(x)\ \ y\ f(2x)$.
9. Encuentre el dominio de la función

   a) $f(x) = \frac{x^4}{x^2+x-6}$

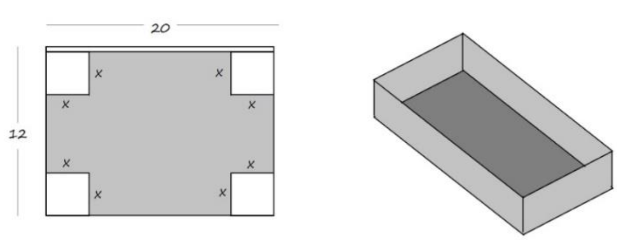
   b) $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$

10. Encuentre el dominio, rango, interceptos, intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento, además trace la gráfica de la función.

   a) $f(x) = 3 - 2x$

   b) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

   c) $h(x) = |2x|$

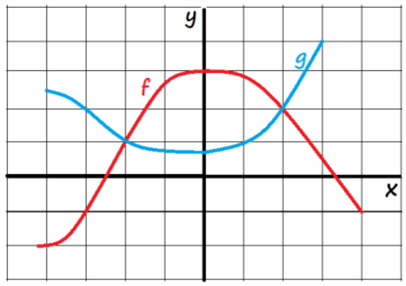


d) $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \leq 0 \\ x+1 & si > 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x \leq -1 \\ 3x+2 & si\ |x| < 1 \\ 7-2x & si\ x \geq 1 \end{cases}$

11. **Se da la gráfica de una función f**

a) Establezca el valor de f(x-1)
b) Estime el valor de f(2)
c) ¿Para cuales valores de x se tiene que f(x)=2?
d) Estime los valores de x tales que f(x)=0
e) Establezca el dominio y el rango de f
f) ¿En qué intervalo es f creciente?



12. **Se proporcionan las gráficas de f y g**

a) Dé los valores de f(-4) y de g(3)
b) ¿Para cuales valores de x se tiene que f(x)=g(x)?
c) Estime la solución de la ecuación f(x)=-1
d) ¿En qué intervalo f es decreciente?
e) Dé el dominio y el rango de f
f) Dé el dominio y rango de g

Anexo n°2. Secuencias de Aprendizaje

Secuencia de Aprendizaje n°1

Nombre: ______________________________________ N° de cuenta: ______________

Catedrático: ___________________________________ Fecha: ____________________

Instrucciones: trabaje en forma clara y ordenada cada ejercicio. Adjunte todos los procedimientos respectivos.

I. Use geogebra para graficar la función $f(x)=x$.

a) ¿Qué observas al graficar esta función?
b) ¿Podrías identificar las variables de esta función?
c) ¿Hay algún valor constante?
d) ¿Qué elementos observas en la gráfica? ¿Cuál es su dominio? ¿rango?, ¿crece? ¿decrece? ¿interceptos?

II. En la misma hoja de trabajo de geogebra gráfica $g(x)=x+1$, $h(x)=x-1$.

a) ¿Qué observas al graficar estas funciones?
b) ¿Podrías identificar las variables de estas funciones?
c) ¿Hay algún valor constante en estas funciones?
d) ¿Qué elementos observas en la gráfica? ¿Cuál es su dominio? ¿rango?, ¿crece? ¿decrece? ¿interceptos?

III. Compara las funciones f(x), g(x), h(x).

a) ¿Qué conclusiones podrías obtener de las semejanzas y diferencias entre las funciones antes mencionadas?

Secuencia de Aprendizaje n°2

Nombre: ______________________________________ N° de cuenta: ______________

Catedrático: ___________________________________ Fecha: ____________________

Instrucciones: trabaje en forma clara y ordenada cada ejercicio. Adjunte todos los procedimientos respectivos.

I. Use geogebra para graficar en una misma hoja de trabajo las funciones $n(x)=2x$, $p(x)=3x$ $r(x)=2x+2$, $s(x)=3x-2$.

a) Obtén conclusiones de comparar estas funciones respecto a f(x).
b) ¿Qué cambios observas?, ¿Hay desplazamientos, en las funciones respecto a f(x)?.
c) ¿Cómo son estos desplazamientos?
d) ¿Qué elementos observas en la gráfica? ¿Cuál es su dominio? ¿rango?, ¿crece? ¿decrece? ¿interceptos?

II. Use geogebra para graficar en una misma hoja de trabajo las funciones $t(x)=-x$, $u(x)=-3x$, $r(x)=-x+2$, $s(x)=-3x+2$.

a) Obtén conclusiones de comparar estas funciones respecto a t(x).
b) ¿Se observan desplazamientos?
c) ¿Cómo son estos desplazamientos?

d) ¿Qué elementos observas en la gráfica? ¿Cuál es su dominio? ¿rango?, ¿crece? ¿decrece? ¿interceptos?

¿Podrías concluir respecto a los movimientos que observaste con las distintas funciones, comparándolas con f(x)?

Secuencia de Aprendizaje n°3

Nombre: ______________________________________ N° de cuenta: ______________

Catedrático: ___________________________________ Fecha: ____________________

Instrucciones: trabaje en forma clara y ordenada cada ejercicio. Adjunte todos los procedimientos respectivos.

IV. Use geogebra para graficar la función $f(x) = x^2$.

e) ¿Qué observas al graficar esta función?
f) ¿Podrías identificar las variables de esta función?
g) ¿Hay algún valor constante?
h) ¿Qué elementos observas en la gráfica? ¿Cuál es su dominio? ¿rango?, ¿crece? ¿decrece? ¿interceptos?

V. En la misma hoja de trabajo de geogebra gráfica $g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = x^2 - 1$.

e) ¿Qué observas al graficar estas funciones?
f) ¿Podrías identificar las variables de estas funciones?, ¿Cómo varían estas?
g) ¿Hay algún valor constante en estas funciones?
h) ¿Qué elementos observas en la gráfica? ¿Cuál es su dominio? ¿rango?, ¿crece? ¿decrece? ¿interceptos?

Secuencia de Aprendizaje n°4

Nombre: _____________________________________ N° de cuenta: ______________

Catedrático: __________________________________ Fecha: ____________________

I. Compara las funciones f(x), g(x), h(x).

a) ¿Qué conclusiones podrías obtener de las semejanzas y diferencias entre las funciones antes mencionadas?

b) Use geogebra para graficar en una misma hoja de trabajo las funciones $n(x)=2x^2$, $p(x)=2(x+1)^2-1$, $r(x)=2(x+1)^2$, $s(x)=2(x-1)^2$.

C) Obtén conclusiones de comparar estas funciones respecto a f(x).

e) ¿Qué cambios observas?, ¿Hay desplazamientos, en las funciones respecto a f(x)?.

f) ¿Cómo son estos desplazamientos?

g) ¿Qué elementos observas en la gráfica? ¿Cuál es su dominio? ¿rango?, ¿crece? ¿decrece? ¿interceptos?

PROYECTO DE INNOVACIÓN
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE HONDURAS -TEC DANLÍ
Secuencia de Aprendizaje n°5

Nombre: ______________________________________ N° de cuenta: _______________

Catedrático: ___________________________________ Fecha: ____________________

Instrucciones: trabaje en forma clara y ordenada cada ejercicio. Adjunte todos los procedimientos respectivos.

I. Use geogebra para graficar la función $f(x) = x^3$.

a) ¿Qué observas al graficar esta función?
b) ¿Podrías identificar las variables de esta función?
c) ¿Hay algún valor constante?
d) ¿Qué elementos observas en la gráfica? ¿Cuál es su dominio? ¿rango?, ¿crece? ¿decrece? ¿interceptos?

II. En la misma hoja de trabajo de geogebra gráfica $g(x)=x^3+1$, $h(x)=x^3-1$.

a) ¿Qué observas al graficar estas funciones?

b) ¿Podrías identificar las variables de estas funciones?, ¿Cómo varían estas?
c) ¿Hay algún valor constante en estas funciones?
d) ¿Qué elementos observas en la gráfica? ¿Cuál es su dominio? ¿rango?, ¿crece? ¿decrece? ¿interceptos?

Secuencia de Aprendizaje n°6

Nombre: ______________________________________ N° de cuenta: ______________

Catedrático: ___________________________________ Fecha: ____________________

Instrucciones: trabaje en forma clara y ordenada cada ejercicio. Adjunte todos los procedimientos respectivos.

Construya la gráfica de g(x)= x^4, h(x)= x^4-1, j(x)= x^4-1   j(x)= 2$(x-1)^4$ k(x)=-3$(x+1)^4$

a) ¿Qué observas al graficar esta función?
b) ¿Podrías identificar las variables de esta función?
c) ¿Hay algún valor constante?
d) Qué conclusiones podrías obtener de la comparación de las tres funciones ¿similitudes? ¿diferencias?
e) Construya con lápiz y papel las funciones y contraste la creada con geogebra y mencione los principales elementos.

Secuencia de Aprendizaje n°7

Nombre: ___________________________________ N° de cuenta: _____________

Catedrático: ________________________________ Fecha: ___________________

Instrucciones: trabaje en forma clara y ordenada cada ejercicio. Adjunte todos los procedimientos respectivos.

Construya con lápiz y papel las funciones de la secuencia n|°7 y contraste la creada con geogebra y mencione los principales elementos.

¿Podrías establecer las diferencias de las funciones construidas a lo largo de las secuencias?

¿Qué similitudes observas? ¿Qué diferencias?

Con tus propias palabras define el concepto de función, variación, traslación, dominio, rango, interceptos, intervalo de crecimiento, intervalos de decrecimiento, valores máximos, valores mínimos.

Anexo n° 3 Prueba Evaluativa Final

PROYECTO DE INNOVACIÓN
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE HONDURAS -TEC DANLÍ

Nombre: ______________________________________ N° de cuenta: ______________

Catedrático: ___________________________________ Fecha: ____________________

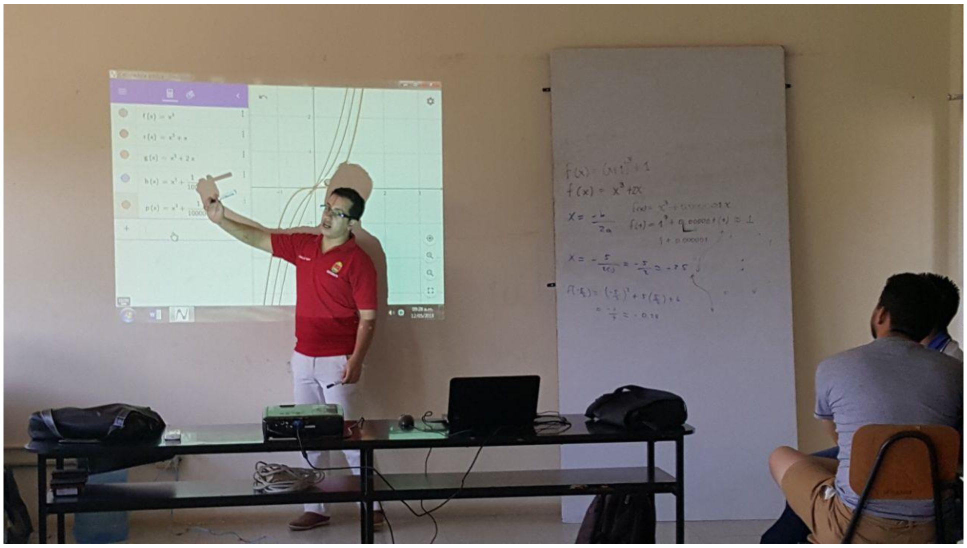
Instrucciones: trabaje en forma clara y ordenada cada ejercicio. Adjunte todos los procedimientos respectivos.

Utilice el software geogebra y construya las funciones que se plantearon en la prueba diagnóstica. Además, interprete desde una perspectiva variacional las diferencias y similitudes de las funciones construidas a lo largo de este proyecto de innovación.

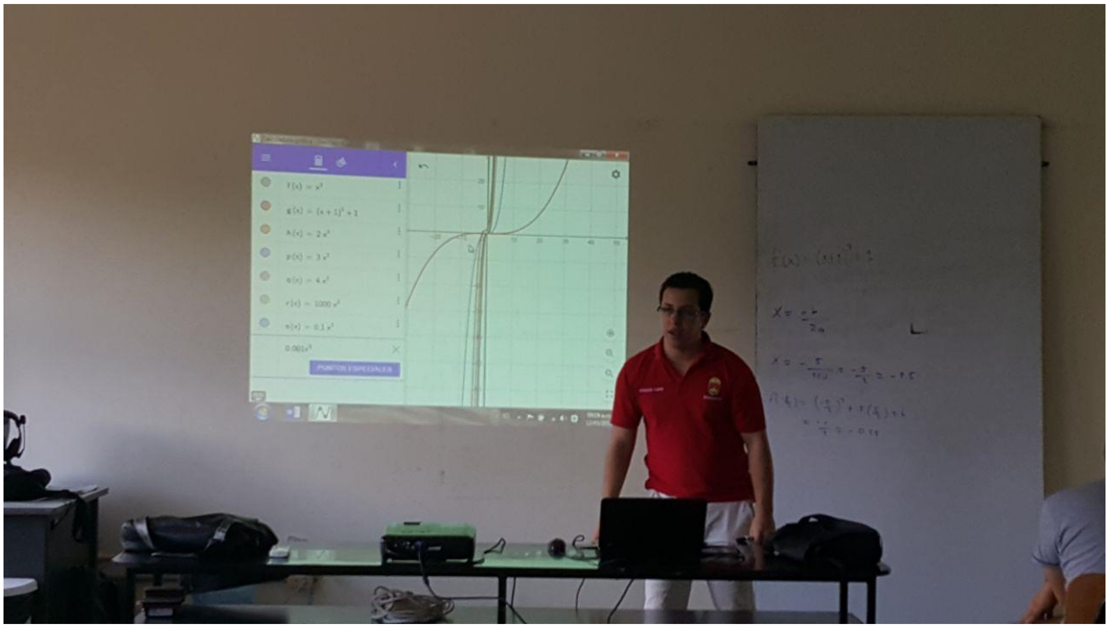
Enuncie el significado de constante, variable, función lineal, función cuadrática, dominio, rango, intervalo de crecimiento y de decrecimiento, puntos máximos, puntos mínimos, interceptos.

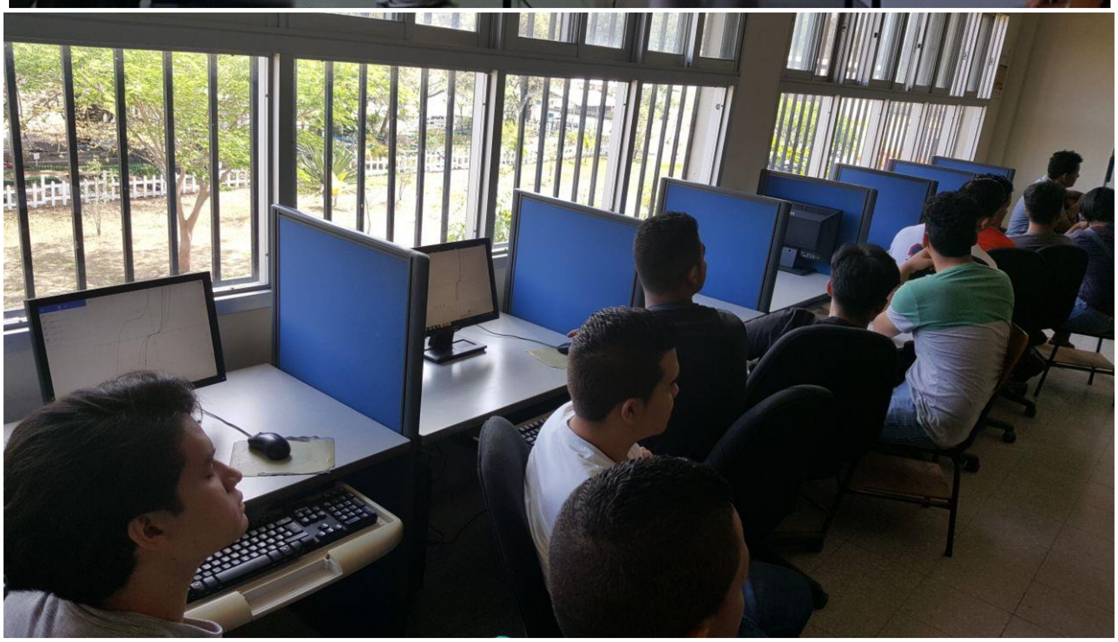
Fotografías de las actividades académicas del proyecto en aula de clase

Proyecto: Desarrollando competencias variacionales en alumnos de álgebra (MM-110) y cálculo diferencial (MM-201) mediante el software geogebra y otras herramientas interactivas



Proyecto: Desarrollando competencias variacionales en alumnos de álgebra (MM-110) y cálculo diferencial (MM-201) mediante el software geogebra y otras herramientas interactivas





Proyecto: Desarrollando competencias variacionales en alumnos de álgebra (MM-110) y cálculo diferencial (MM-201) mediante el software geogebra y otras herramientas interactivas